Matriz Inversa

Para una matriz cuadrada A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adjunta}(A)^T$$

✔ Solo existe si $\det(A) \neq 0$

✔ Puedes usar:

- Regla rápida para 2x2
- Método de cofactores y adjunta
- Método de Gauss (Aumentar con la identidad y triangular hasta llegar a I)

Nivel 1: Matrices 2x2 (usa la regla rápida)

Ejercicio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$Adj(C) = \begin{pmatrix} 4 & +3 \\ +1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Nivel 2: Matrices 3x3 (usa adjunta y determinante)

Ejercicio 4

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|I| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 40 - 15 - 24 = 1$$

$$Adj(I) = \begin{pmatrix} -24 & +20 & -5 \\ +18 & -15 & +4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|E| = 1+6-8 = -1$$

$$Adj^T(E) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & -7 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -7 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 7 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|F| = 24+5-12 = 17$$

$$Adj(F) = \begin{pmatrix} -15 & +6 & 5 \\ -7 & -4 & +8 \\ 6 & +1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -15 & -7 & 6 \\ 6 & -4 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Nivel 3: Inversa por método de Gauss

(Montas la matriz aumentada $A|I$ y aplicas transformaciones)

Ejercicio 7

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2F_1}{=} \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 4 & 4 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1-F_2}{=} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\overset{F_2-7F_1}{=} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -28 & 8 \end{array}\right) \overset{F_2/4}{=} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \end{array}\right)$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3-2F_1}{\overset{F_1+2F_2}{=}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\overset{3F_2-F_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \overset{F_3/11}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 3/11 & -1/11 \end{array}\right) = \ldots$$

Ejercicio 9

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 5 & 0 & -1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -39 & 30 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Mismo que en Ej 4.

Ejercicio 10

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ ¿Existe J^{-1}? Justifica. $$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|J| = 4-4 = 0$$

$$\nexists\ J^{-1}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1-3+4 = 0$$

$$\nexists\ D^{-1}$$

Ecuaciones Matriciales

Ejercicio 1: Producto simple por la izquierda

$$AX = B, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$AX = B$

$A^{-1}AX = A^{-1} \cdot B$

$IX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$

Ejercicio 2: Producto por la derecha (¡no conmutativo!)

$$XA = B, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$XA = B$

$XAA^{-1} = BA^{-1}$

$XI = BA^{-1} \Rightarrow \boxed{X = BA^{-1}}$

Ejercicio 3: Suma y escalar

$$2X + A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$2X + A = B$

$2X = B - A \Rightarrow \boxed{X = \frac{B-A}{2}}$

Ejercicio 4: Producto + suma

$$AX + C = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$AX + C = B$

$AX = B - C$

$A^{-1}AX = A^{-1}(B-C)$

$\boxed{X = A^{-1}(B-C)}$

Ejercicio 5: Factor común (usa la identidad)

$$AX + X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$AX + X = B$

$AX + IX = B$

$(A+I)X = B$

$(A+I)^{-1}(A+I)X = (A+I)^{-1}B$

$\boxed{X = (A+I)^{-1}B}$

Ejercicio 6: Producto con inversa

$$X^{-1} = A, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$X^{-1} = A$

$X \cdot X^{-1} = X \cdot A$

$I = X \cdot A$

$I \cdot A^{-1} = X \cdot A \cdot A^{-1} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = X}$

Ejercicio 7: Inversa más escalar

$$X^{-1} + A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$X^{-1} + A = B$

$X^{-1} = B - A \Rightarrow \boxed{X = (B-A)^{-1}}$

Ejercicio 8: Producto doble

$$AXB = C, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$AXB = C$

$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$

$\boxed{X = A^{-1}CB^{-1}}$

Ejercicio 9: Producto matricial con identidad

$$AX = I, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Encuentra la inversa de A)

$AX = I$

$A^{-1}AX = A^{-1}I$

$\boxed{X = A^{-I}}$

Ejercicio 10: Conmutatividad forzada

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AX = XA, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(Encuentra al menos una matriz $X \neq A$ que conmute con A)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix}$

$b = 2b \Rightarrow b = 0$

$2c = c \Rightarrow c = 0$

Ejercicio 11: Inversa a ambos lados

$$A^{-1}XA = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(Sugerencia: multiplica por A por la izquierda y por la derecha)

$A^{-1}XA=B$

$AA^{-1}XAA^{-1}=ABA^{-1}$

$\boxed{X=ABA^{-1}}$

Ejercicio 12: Transpuesta y producto

$$X^TA = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Despeja X, usando transpuesta al final)

$X^TA=B$

$X^TAA^{-1}=BA^{-1}$

$X^T=BA^{-1} \Rightarrow \boxed{X=(BA^{-1})^T}$

Ejercicio 13: Producto con matriz invertible a la derecha

$$XA = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$XA=B$

$\boxed{X=BA^{-1}}$

Ejercicio 14: Factor común no evidente

$$AX + XA = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(Hay que ser creativo: sistema matricial)

$AX+XA=B$

$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&2a+b\\c&2c+d\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}2a+2c&2a+2b+2d\\2c&2c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\0&2\end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2(a+c)=4 & \Rightarrow a=2 \\ 2(a+b+d)=4 & \Rightarrow b=-1 \\ 2c=0 & \Rightarrow c=0 \\ 2(c+d)=2 & \Rightarrow d=1 \end{cases}$

$\boxed{X=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}}$

Ejercicio 15: Inversa y suma a ambos lados

$$A + X^{-1} = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$A+X^{-1}=B$

$X^{-1}=B-A \Rightarrow \boxed{X=(B-A)^{-1}}$

Ejercicio 16: Producto triple con matrices distintas

$$AXB = C, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$AXB=C$

$\boxed{X=A^{-1}CB^{-1}}$

Ejercicio 17: Despeje con transpuesta aplicada

$$(AX)^T = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$(AX)^T=B$

$AX=B^T \Rightarrow \boxed{X=A^{-1}B^T}$

Ejercicio 18: Matriz adjunta (¡nivel jefaza!)

$$\operatorname{adj}(X) = A, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

(Recuerda: en 2x2, la adjunta es simplemente intercambiar elementos y cambiar signos)

$Adj(X)=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&-c\\-b&a\end{pmatrix}$

$\begin{cases} 4=d \\ -2=-c & \Rightarrow c=2 \\ -3=-b & \Rightarrow b=3 \\ 1=a \end{cases}$

$\boxed{X=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}}$

Ejercicio 19: Descomposición oculta

$$X = A^{-1}B + C, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^{-1}=\frac{Adj(A)^T}{|A|}$ $\quad |A|=2$ $\quad Adj(A)=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}1&-1/2\\0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&0\\ \frac{1}{2}&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$\boxed{X=\begin{pmatrix}5/2&1\\3/2&2\end{pmatrix}}$

Ejercicio 20: Composición con identidad

$$A(X + I) = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$A(X+I)=B$

$X+I=A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X=A^{-1}B-I}$

Sistema 1 (Matrices 2×2):

Sea $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, encuentra X y Y tal que:

$$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\\ 2X-Y=\begin{pmatrix}1&4\\-1&0\end{pmatrix}\end{cases}$$

👉 **Sugerencia**: suma y resta como si fueran ecuaciones normales, ¡pero con matrices!

Reducción: $3X=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4\\-1&0\end{pmatrix}$

$3X=\begin{pmatrix}3&4\\0&3\end{pmatrix} \Rightarrow X=\dfrac{\begin{pmatrix}3&4\\0&3\end{pmatrix}}{3}=\boxed{\begin{pmatrix}1&4/3\\0&1\end{pmatrix}}$

$Y=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}-X=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&4/3\\0&1\end{pmatrix}$

$\boxed{Y=\begin{pmatrix}1&-4/3\\1&2\end{pmatrix}}$

Sistema 2 (conmutatividad en juego):

$$\begin{cases} XA+AY=B\\ X-Y=C\end{cases}$$

Con:

- $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$
- $B=\begin{pmatrix}4&2\\2&10\end{pmatrix}$
- $C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$XA+AY=B$

$(-)\ \ XA-YA=CA$

$AY+YA=B-CA$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\2&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&b\\2c&2d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&2b\\c&2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\2&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2a&3b\\3c&4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\2&8\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a=3/2\\ b=0\\ c=2/3\\ d=2\end{cases}$

$\boxed{Y=\begin{pmatrix}3/2&0\\2/3&2\end{pmatrix}}$

$X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3/2&0\\2/3&2\end{pmatrix}$

$\boxed{X=\begin{pmatrix}5/2&1\\2/3&3\end{pmatrix}}$

Sistema 3 (con producto matricial a izquierda y derecha):

$$\begin{cases} AX+Y=C\\ X+BY=D\end{cases}$$

Donde:

- $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$
- $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$
- $C=\begin{pmatrix}3&2\\2&6\end{pmatrix}$
- $D=\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$

sustitución: $X=D-BY$

$A(D-BY)+Y=C$

$AD-ABY+Y=C$

$(I-AB)Y=C-AD$

$Y=(I-AB)^{-1}(C-AD)$

$Y=\begin{pmatrix}-2&-1\\-2&-1\end{pmatrix}^{-1}(C-AD)$

$\hookrightarrow D=0 \Rightarrow$ No tiene inversa

No hay solución.

Sistema 4 (involucra inversas):

Sea $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\begin{cases} X+Y^{-1}=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\\ XY=I\end{cases}$$

👉 ¿Ves lo que pasa si multiplicas la segunda por la izquierda?

$XY+Y^{-1}Y=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\cdot Y$

$I+I=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}Y$

$2I=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\cdot Y$

$2I=4I\cdot Y$

$2I=4Y \Rightarrow \boxed{Y=\dfrac{I}{2}=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1/2\end{pmatrix}}$

$X=Y^{-1}=2I$

$\boxed{X=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}}$

Sistema 5 (reto de simetría):

$$\begin{cases} X+Y=A\\ X^T=Y\end{cases}$$

Con:

- $A=\begin{pmatrix}5&1\\1&3\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

👉 Encuentra X y Y sabiendo que una es la traspuesta de la otra.

$X+X^T=\begin{pmatrix}5&1\\1&3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\1&3\end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases}2a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{2}\\ b+c=1\\ 2d=3 \Rightarrow d=\frac{3}{2}\end{cases}$

$\boxed{X=\begin{pmatrix}5/2&b\\1-b&3/2\end{pmatrix}}$ $\quad \boxed{Y=\begin{pmatrix}5/2&1-b\\b&3/2\end{pmatrix}}$